

文章编号: 1000-8055(2009)12-2727-08

# 一种基于数值计算的轴流压气机旋转失速稳定性模型 —— 之一: 理论模型及算法分析

侯睿炜, 孙晓峰

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 提出了一个基于直接数值计算结果基础上的旋转失速线性稳定性模型, 描述了如何从基本的 Navier-Stokes 方程出发, 把轴流压气机流动稳定性问题转化为一个特征值问题的基本理论框架. 对压气机不稳定边界的判断通过计算和检验特征值的方式来实现. 给出了有限差分法和基于 Gauss-Lobatto 节点的谱配置方法两种数值离散的方式, 并分析了这两种离散方式的收敛特性.

**关 键 词:** 轴流压气机; 旋转失速; 稳定性; 特征值; 有限差分法; 谱方法

**中图分类号:** V211.6

**文献标识码:** A

## Linear stability model of rotating stall based on direct numerical techniques: Part I — Theoretical model and algorithm

HOU Rui-wei, SUN Xiao-feng

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A linear stability model of rotating stall in axial flow fan/compressors was presented based on direct numerical methods to Navier-Stokes equations, which was described as an eigenvalue problem. The inception point of rotating stall can be predicted by the model without requiring more experimental or empirical relations as input data. Two different methods, finite difference method and spectral collocation method, have been proposed to discretize the eigenvalue equation and the relevant comparison and analysis also have been given in the present investigation.

**Key words:** axial compressor; rotating stall; stability; eigenvalue; finite difference method; spectral method

旋转失速与喘振是轴流压气机及压缩系统中普遍存在的不稳定状态, 当压气机偏离设计工况的时候, 就有可能进入这两种不稳定的状态当中. 对于压气机稳定边界的预测, 一直是设计人员十分关注的问题. 自从旋转失速和喘振现象被发现以来, 为了认识这种流动现象的物理机理, 产生了大量关于压气机不稳定现象的理论研究工作, 根据研究问题的方法, 这些工作大体上可以分为两

类: 解析模型与数值模拟.

在早期的研究中, 主要是以解析型为主. Emmons<sup>[1]</sup>, Stenning<sup>[2]</sup> 针对二维平面叶栅, 作了流动无旋、不可压的假设, 扰动速度势被写成傅里叶级数的形式, 将解的发散或衰减与系统的稳定性连系起来. Moore 和 Greitzer<sup>[3-4]</sup> 针对一种管道/压气机/容腔/节流阀的压缩系统建立了一种小扰动模型, 将压缩系统的不稳定性归结为一种

收稿日期: 2009-09-30; 修订日期: 2009-11-12

基金项目: 国家自然科学基金(50736007)

作者简介: 侯睿炜(1979-), 男, 辽宁鞍山人, 博士生, 主要研究方向: 轴流压气机旋转失速稳定性模型, 机匣处理扩稳机理研究.

模态特征,其中喘振为0模态,而旋转失速为高阶模态.Ludwig与Nenni<sup>[5]</sup>的模型将压气机的失稳用特征值的虚部变化来反映,这是求解稳定性问题的一种经典的方式。

线性小扰动模型具有判据简洁清晰的优点,同时也存在着过于简化的缺点.尤其上述模型都会把叶片排模化为激盘来处理,叶片造型的影响被完全忽略了;叶栅或压气机的特性线都被认为是已知的,或者要引入经验性的修正关系如叶栅的损失系数、气流偏转对攻角的变化,只有这些数据与实验吻合的比较好的情况下才能得到合理的预测.而对于一个新的设计来说,这些条件都是未知的,所以不能给设计人员预测稳定边界提供更多有效的帮助。

研究旋转失速稳定性问题的另一个途径就是从流体力学基本方程出发进行数值求解. Takata和Nagano<sup>[6]</sup>发展了一个求解通过二维平面叶栅的不可压流非定常数值模型,将叶栅用一个有限长度但含有无穷多叶片假设的激盘来模拟,引入了压力损失与出口气流角的经验关系,这个模型可以用来预测失速的起始、失速团的发展以及传播的速度. Neuhoff和Grahl<sup>[7]</sup>, Lindau和Owen<sup>[8]</sup>用类似的方式发展了一个准三维可压缩模型来预测旋转失速的发展,其中Lindau引入了体积力的模型来确保气体沿着平均中弧线的方向流动. Longley<sup>[9]</sup>通过引入体积力的方式使叶片区域内的周向速度得以连续变化以消除数值伪波的产生,并通过将周向力与叶栅环量而不是通常的出口气流角建立起联系获得了很好的计算结果. Escuret和Garnier<sup>[10]</sup>用包含了体积力的周向平均欧拉方程来模拟多级压气机的旋转失速问题. 这些模型仍然没有摆脱对经验关系的依赖,因此也限制了它们的应用。

Gong<sup>[11]</sup>建立了一个包含分布式体积力的三维不可压模型,体积力可以随当地的流场条件而变化,而不是仅仅对进口条件进行响应. 这样对经验关系的依赖大大降低,但力的分布方式仍然缺乏严格的方式. Xu<sup>[12]</sup>提出了一种用定常计算得到足够精度的分布式体积力,然后用于非定常计算的方法。

体积力的模型对叶片的几何造型做了很大程度上的简化,同时也大大减小了计算量. 与之相对的,就是求解雷诺平均Navier-Stokes(N-S)方程,除了湍流模型,完全不需要其他经验参数的引入,对叶片几何以及三维效应的刻画更为准确,

Hoying<sup>[13]</sup>发展了二维和三维的CFD(计算流体力学)程序来考察通道尺度的流场结构对轴流压气机旋转失速产生过程的影响, He<sup>[14]</sup>发展了一个准三维的时间推进模型去捕捉失速先兆的形成. 一方面,湍流模型的适用性尚需要更多的验证;另一方面,较大的计算量限制了这种方法在工程上的应用。

从数学上看,所有这些数值模型都是求解一个初边值问题,计算的结果对初始扰动都存在着很大的敏感性. 在已有的工作中,并没有一种理论上完备的提供初始扰动的方式,大多还是采用试凑的方式,人为的向流场中施加一个扰动量,直到这个扰动发散形成不稳定的流动为止. 例如, He在转子进口总压上添加了一个正弦扰动,从而得到了与实验结果相符合的失速过程,而单纯的提高转子出口的压力则不能得到合理的结果,同时发现一个一阶谐波比二阶谐波更快的发展为失速团. Lindau<sup>[8]</sup>和Longley<sup>[9]</sup>则通过在出口气流角等经验关系中引入任意的背景噪声的方式来激励流场进入失速的过程, Gong<sup>[11]</sup>在叶尖给体积力添加了一个脉冲扰动,来激发失速的形成,这就向我们提出了两个问题:第一,在什么时候或者说什么样的条件下开始引入初始扰动比较合适? 从物理上讲,一个近失速点将会是一个比较合适的选择,但是在设计阶段,我们不可能精确的知道这个近失速点的位置,只有不断的试验,才有可能得到合理的结果,这需要大量的时间,计算周期较长,因此作为一种便捷的工具提供给设计人员并不合适. 第二,引入一个什么类型的扰动是合适的? 这个扰动代表了系统的特征频率,因此能够迅速的导致系统进入失速状态,而不用反复的去试验扰动的形式。

尽管求解初边值问题可以提供关于失速过程的很多流动方面的细节,但是从数学上来讲,判断一个系统是否稳定首先是一个特征值问题,首先判断系统在什么状况下可能失稳,对于工程实际来说,这一点已经足够帮助我们判断失速的边界了,如果想继续研究失速的过程,不稳定的特征值也会为初边值问题提供一个合理的初始扰动. 在研究层流到湍流的转捩问题中,有完整的解决这个问题思路. 首先通过定常计算得到某个雷诺数下的速度剖面,再通过Orr-Sommerfeld方程求解特征值问题来判断流动是否产生转捩以及失稳的频率. 这样的思路和方法也同样可以应用到压气机稳定性问题当中来。

在压气机设计的过程中,预估压气机的稳定边界是一个非常重要的工作,以往的方法如  $D$  因子准则、Koch 准则,或者流线曲率法和通流矩阵法,都要依赖大量的实验数据和经验关系,而近年来三维数值用来进行流场的校核在设计过程中得到越来越多的应用.但数值计算的结果仍然没有办法对稳定边界的确定给出足够的依据,经验证明,仅仅依靠计算的收敛情况是没有办法确定失速边界的具体位置的.针对这种情况,我们从三维定常计算中提取出流场的数据,以此作为模型方程中的平均量,在此基础上引入小扰动假设,通过求解特征值来判断这一工况下的流场是否稳定.如果流场是稳定的,可以通过提高背压等方式继续计算更低流量下的流场分布,直到计算得到的特征值出现不稳定模态为止,于是压气机的失速边界得到确定,如果失速裕度小于设计要求,则需要修改初始设计,如果满足设计要求,完成气动设计完成.这就相当于在压气机的设计过程中加入了一个稳定性校核的环节,如图 1 所示.相比求解

一个非定常的初边值模型,特征值计算的计算周期更短,更适合于在设计阶段辅助判断失速边界.

事实上,任何一个关于流体动稳定性的问题,都可以从  $N-S$  方程出发,通过求解特征值问题来研究.在具体研究轴流压气机旋转失速稳定性问题的时候,我们会遇到如下两个问题:

第一个问题是:轴流压气机内复杂的几何型面如何来刻划?在通常的 CFD 计算中,处理这一问题的方法是生成三维贴体网格,流动在叶片表面边界满足无滑移边界条件.这样在把  $N-S$  方程从物理域变换到计算域的过程中,方程的复杂性会大大增加,在此基础上线性化的模型会更加复杂,当然,理论上始终存在着可能通过这样的方式描述复杂边界并以此建立稳定性模型.

另一方面,近年来出现的浸入式边界方法(immersed boundary method),为刻划复杂边界提出了一种新的思路<sup>[15]</sup>.这种方法在动量方程的右端用一个力源项的形式来体现固体边界对流动的影响,数学上可以证明,源项与边界条件是等价的

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u\right)+\nabla p=\mu\Delta u+F$$
$$F(x,t)=\int_{\partial\Omega_i(t)}f(r,s,t)\delta[x-X(r,s,t)]dS$$
$$f_k=\alpha\int_0^tu(X_k,\bar{t})d\bar{t}+\beta u(X_k,t)$$

这样,就不必生成复杂的贴体网格,用普通的正交网格就可以将方程离散,在边界处,力的存在通过  $\delta$  函数来表示,而力的大小与流场速度联系起来.所以,力源项在理论上可以写成与各个流场参数相关的函数形式.本文的模型就是建立在这样的一种模型的基础上的,所有复杂边界的影响都用力的模型来代替.当然,要把这样的力写成可以线性化的形式仍然需要相当的数学技巧,但这种方式一定是存在的.

实际上,在压气机中广泛应用的体积力就是这种方式在更简单情况下的应用.在无穷多叶片的假设下,叶片对流场的影响被一个均匀连续的体积力函数代替,我们在后续文章(第二部分:简化模型及应用)中可以看到这种模型的具体应用.

第二个问题是:一个线性化的模型是否足以预测压气机旋转失速的边界?我们知道,当旋转失速或者喘振发生之后,流动的状况是一个完全的非线性问题,其动力学性质是不足以用一个线性化的模型来描述,但是对于失速起始点的预测,

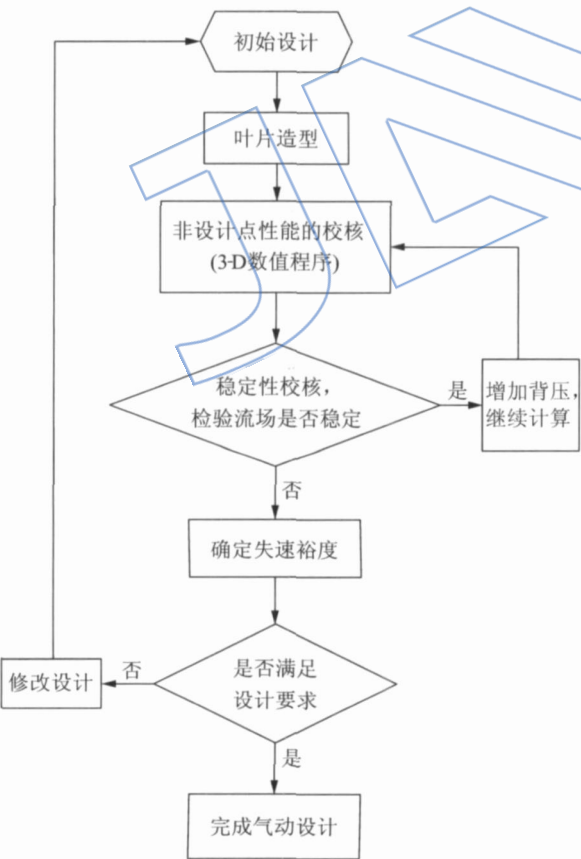


图 1 引入稳定性校核的流程图

Fig. 1 Flow chart of introducing the stability analysis into the compressor aerodynamics design process

则完全可以通过一个线性化的模型来实现. 在早期的旋转失速模型中,更多的是关注失速团的个数及传播速度这样的非线性过程,但是自从 Epstein和 Ffowcs Williams 等人<sup>[16]</sup>提出主动控制的方法来抑制旋转失速的发展以来,人们对旋转失速的认知逐渐转移到失速先兆的观测与分析上来. 在这个过程中,人们发现,旋转失速的初始扰动波的发展存在这一个明显的从小到大的发展过程,如图 2 所示<sup>[17]</sup>,这是对一个低速压气机转子前轴向速度作周向 Fourier 分解后其一阶系数在失速发生前后随时间演化的历程,可以看出其幅值从小到大,从线性到非线性的发展过程. 实际上,任何一个扰动的放大都是一个从小到达,从线性到非线性的过程,只不过发展的速度快慢不同而已. 因此,对于旋转失速发展的起始阶段,线性的模型是完全适用的.

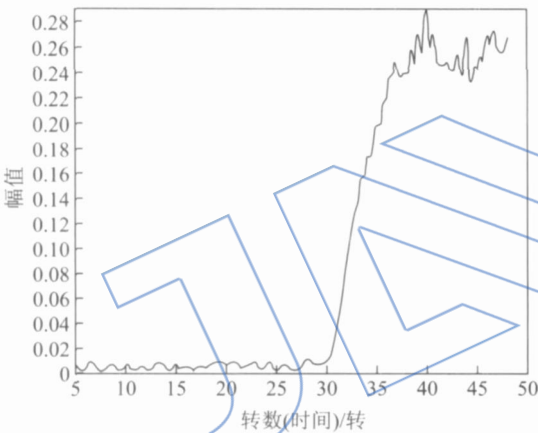


图 2 失速扰动波的发展过程

Fig. 2 Evolution of pre-stall perturbations

1 模型方程

1.1 控制方程

原则上,所有流动现象都要服从流体力学的基本方程,即 N-S 方程,在研究实际问题中,我们可能根据各种特定的情况给出不同程度的近似(如图 3 所示). 这里,我们就从最基本的 N-S 方程出发,阐述如何将一个稳定性问题表述为特征

值问题,其他的情况都可以看作是在此基础上的简化模型,具体的例子将在后续文章(第二部分:简化模型及应用)中给出.

我们首先从如下的 N-S 方程开始

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{V} = \\ (\gamma - 1)(-\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V}) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \tag{4}$$

其中  $\mathbf{v}$  是速度向量,  $\rho$  是密度,  $p$  是压力,  $\gamma$  是比热比,  $\mu$  是动力学黏性系数,  $\mathbf{f}$  代表了力的作用,  $\boldsymbol{\tau}$  是黏性应力张量,  $\mathbf{q}$  为热传导量率,这里我们忽略热传导的影响,以及由黏性耗散损失的机械能.

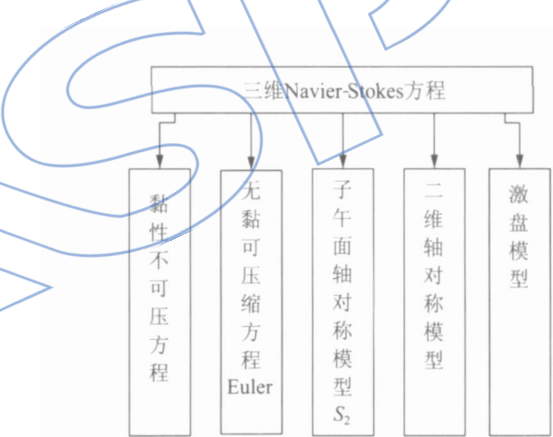


图 3 各种不同的简化模型

Fig. 3 Approximate models of N-S equations

1.2 方程的线性化

我们将流场参数分解为平均量和扰动量之和的形式

$$\begin{aligned} V_r &= \bar{V}_r + v_r', \quad V_\theta = \bar{V}_\theta + v_\theta', \quad V_z = \bar{V}_z + v_z', \\ p &= \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \\ f_r &= \bar{f}_r + f_r', \quad f_\theta = \bar{f}_\theta + f_\theta', \quad f_z = \bar{f}_z + f_z' \end{aligned} \tag{5}$$

带入方程(1)~(3),得到线性化的 N-S 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + \bar{V}_z \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \left( \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} + \frac{\bar{V}_r}{r} \right) \rho' + \rho' \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\bar{p}}{r} \right) v_r' + \\ \frac{\rho}{r} \frac{\partial v_\theta'}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} v_\theta' + \rho' \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z' = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left[ \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \right] \rho' +$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_r'}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial v_r'}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial v_r'}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial v_r'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} v_r' + \left( \frac{\partial \bar{v}_r}{r \partial \theta} - \frac{2 \bar{v}_\theta}{r} \right) v_\theta' + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} v_z' \right] =$$

$$f_r' - \frac{\partial p'}{\partial r} + \mu \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_r'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r'}{\partial z^2} + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_z'}{\partial r \partial z} + \frac{4}{3r} \frac{\partial v_r'}{\partial r} - \frac{v_r'}{3r^2} \right] \quad (7)$$

$$\left[ \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\theta}{r} \right] \rho' +$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_\theta'}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial v_\theta'}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta'}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial v_\theta'}{\partial z} + \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) v_r' + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) v_\theta' + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} v_z' \right] =$$

$$f_\theta' - \frac{\partial p'}{r \partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial r^2} + \frac{4}{3r^2} \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial z^2} + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 v_r'}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 v_z'}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3r^2} \frac{\partial v_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta'}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_\theta' \right] \quad (8)$$

$$\left[ \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] \rho' + \rho \left[ \frac{\partial v_z'}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial v_z'}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial v_z'}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial v_z'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} v_r' + \frac{\partial \bar{v}_z}{r \partial \theta} v_\theta' + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} v_z' \right] =$$

$$f_z' - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z'}{\partial \theta^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_r'}{\partial r \partial z} + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{3r} \frac{\partial v_r'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z'}{\partial r} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} v_r' + \bar{v}_\theta \frac{\partial p'}{r \partial \theta} + \frac{\partial \bar{p}}{r \partial \theta} v_\theta' + \bar{v}_z \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} v_z' + \gamma \bar{p} \left[ \frac{\partial v_r'}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta'}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} \right] +$$

$$\gamma \left[ \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] p' = 0 \quad (10)$$

### 1.3 平均流场的计算

线性化方程(6)~(10)中,流场参数的平均量及其导数,均来自定常计算,通常通过求解雷诺平均 N-S 方程来得到,根据模型简化程度的不同,也可以通过其他与模型相适应的方式得到,比如,可以通过求解通流计算程序得到一个子午面上的平均流场,这时模型方程中平均量的周向导数为零。具体简化的例子将在后面给出。

### 1.4 关于力的模型

从方程(6)~(10)中可以看出,系统中含有 5 个方程,同时含有 8 个未知数: $\rho'$ ,  $p'$ ,  $v_r'$ ,  $v_\theta'$ ,  $v_z'$ ,  $f_r'$ ,  $f_\theta'$ ,  $f_z'$ 。一般地,力源项可以写成关于流场参数(压力、密度、速度)的函数

$$f(\rho, p, v) = \bar{f}(\rho, \bar{p}, \bar{v}_r, \bar{v}_\theta, \bar{v}_z) + \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho' +$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} p' + \frac{\partial f}{\partial v_r} v_r' + \frac{\partial f}{\partial v_\theta} v_\theta' + \frac{\partial f}{\partial v_z} v_z' \quad (11)$$

所以  $f_r'$ ,  $f_\theta'$ ,  $f_z'$  可以写成

$$f_{r,\theta,z}' = \frac{\partial f_{r,\theta,z}}{\partial v_r} v_r' + \frac{\partial f_{r,\theta,z}}{\partial v_\theta} v_\theta' + \frac{\partial f_{r,\theta,z}}{\partial v_z} v_z' +$$

$$\frac{\partial f_{r,\theta,z}}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial f_{r,\theta,z}}{\partial p} p' \quad (12)$$

带入方程(7)~(9)得到封闭的线性化方程组。在具体问题中,力会具有不同的具体形式,在后续文章(第二部分:简化模型及应用)中将给出一种力的具体模型。

### 1.5 特征方程

进一步,我们假设方程中的扰动量可以写成谐波的形式

$$\rho' = \bar{\rho}(r, z) e^{i(-\omega t + \alpha \theta)}$$

$$v_r' = \bar{v}_r(r, z) e^{i(-\omega t + \alpha \theta)}$$

$$v_\theta' = \bar{v}_\theta(r, z) e^{i(-\omega t + \alpha \theta)}$$

$$v_z' = \bar{v}_z(r, z) e^{i(-\omega t + \alpha \theta)}$$

$$p' = \bar{p}(r, z) e^{i(-\omega t + \alpha \theta)} \quad (13)$$

其中  $\alpha$  为周向波数,  $\omega$  为频率。通常情况下,这两者都是复数。在时间稳定性理论中,  $\alpha$  假设为实数,而  $\omega$  为复数。并且,如果其虚部为负  $\omega = \text{Im}(\omega) < 0$ , 那么扰动是衰减的,如果虚部为正  $\omega = \text{Im}(\omega) > 0$ , 那么扰动是增长的,此时系统失稳,实部  $\omega = \text{Re}(\omega)$  为失稳的频率。

将式(13)带入线性化方程组中,可以得到一个特征方程组

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + Q \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + C \frac{\partial \Phi}{\partial r} + D \frac{\partial \Phi}{\partial z} + H \Phi = 0 \quad (14)$$

其中

$$\Phi = \{\tilde{\rho}, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta, \tilde{v}_z, \tilde{p}\}^T$$

为了确定特征方程的解,还需要补充相应边界条件,进出口处取齐次边界条件

$$\tilde{v}_r = \tilde{v}_\theta = \tilde{v}_z = 0, \quad \tilde{\rho} = 0, \quad \tilde{p} = 0$$

壁面边界取无滑移边界条件

$$\tilde{v}_r = \tilde{v}_\theta = \tilde{v}_z = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = \chi$$

其中  $n$  为壁面法线方向,  $\chi$  的值由壁面法向动量方程决定。

## 2 数值离散及算法分析

我们采用了有限差分 and 谱配置法两种方式对特征方程(14)进行离散. 分别叙述如下。

### 2.1 二阶精度有限差分法

利用有限差分方法对特征方程(14)进行离散的时候,二阶导数、混合导数以及一阶导数都采用了二阶精度的中心差分格式

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta r)^2} + \\ B_{i,j} &= \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta z)^2} + \\ Q_{i,j} &= \frac{\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i-1,j+1}}{4\Delta r \cdot \Delta z} + \\ C_{i,j} &= \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2\Delta r} + D_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta z} + \\ H_{i,j} &\Phi_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_r - 1; \quad j = 1, \dots, N_z - 1 \quad (15)$$

式中  $N_r$  和  $N_z$  分别为径向和轴向的网格点数. 离散后共含有  $5 \times (N_r - 1) \times (N_z - 1)$  个方程,  $5 \times (N_r + 1) \times (N_z + 1)$  个未知数,补充进出口边界条件  $2 \times 5 \times (N_r - 1)$  个,轮毂和机匣处的壁面条件  $2 \times 5 \times (N_z + 1)$  个,这样方程组得到封闭,同时系统的维数降低至  $5 \times (N_r - 1) \times (N_z - 1) + 8$ ,未知数向量表示如下:

$$\begin{aligned} \Phi = \{ & (\tilde{\rho}, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta, \tilde{v}_z, \tilde{p})_{i=1, \dots, N_r-1; j=1, \dots, N_z-1}, \\ & \tilde{\rho}_{0,0}, \tilde{p}_{0,0}, \tilde{\rho}_{N_r,0}, \tilde{p}_{N_r,0}, \tilde{\rho}_{0,N_z}, \\ & \tilde{p}_{0,N_z}, \tilde{\rho}_{N_r,N_z}, \tilde{p}_{N_r,N_z} \}^T \end{aligned}$$

### 2.2 谱配置方法

我们采用了基于 Gauss-Lotatto 节点的谱配置法(拟谱方法)对特征方程进行离散,这种离散的格式广泛适用于各种边值问题. 利用定义在区间  $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$  上的 Chebyshev 多项式  $T_{N_r}, T_{N_z}$ , 其中

$$\xi_i = \cos(\pi i / N_r); \quad i = 0, 1, \dots, N_r \quad (16)$$

$$\eta_j = \cos(\pi j / N_z); \quad j = 0, 1, \dots, N_z \quad (17)$$

方程(14)中的一阶导数可以表示为

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{i,j} = \sum_{k=0}^{N_r} E_{ik}^r \Phi_{kj} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{i,j} = \sum_{k=0}^{N_z} \Phi_{ik} E_{kj}^z \quad (19)$$

其中  $E_{ik}^r$  和  $E_{kj}^z$  是导数矩阵的元素

$$E_{ik}^r = \frac{c_i}{c_k} \frac{(-1)^{k+i}}{\xi_i - \xi_k}; \quad i \neq k$$

$$E_{rr}^r = -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)}$$

$$E_{00}^r = -E_{N_r N_r}^r = \frac{2N_r^2 + 1}{6}$$

$$E_{kj}^z = \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{k+j}}{\eta_j - \eta_k}; \quad j \neq k$$

$$E_{jj}^z = -\frac{\eta_j}{2(1 - \eta_j^2)}$$

$$E_{00}^z = -E_{N_z N_z}^z = \frac{2N_z^2 + 1}{6}$$

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N_r \\ 1, & 0 < i < N_r \end{cases}$$

$$c_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N_z \\ 1, & 0 < j < N_z \end{cases}$$

方程(14)中的二阶偏导数项可表示为

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_{i,j} = \sum_{k=0}^{N_r} F_{ik}^r \Phi_{kj} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{i,j} = \sum_{k=0}^{N_z} \Phi_{ik} F_{kj}^z \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \right|_{i,j} = \sum_{m=0}^{N_r} \left( \sum_{k=0}^{N_z} E_{ik}^r \Phi_{km} \right) E_{mj}^z \quad (22)$$

其中

$$F_{ik}^r = E_{im}^r E_{mk}^r, \quad F_{kj}^z = E_{km}^z E_{mj}^z$$

一般地,在采用谱离散的时候,需要将物理域映射到计算域,例如

$$(r, z) \rightarrow (\xi, \eta)$$

则相应的 Jacob 矩阵也可用得到. 类似的,应用相应的边界条件,方程组的维数为  $5 \times (N_r - 1) \times (N_z - 1) + 8$ ,系统封闭.

### 2.3 特征值问题

无论采用有限差分格式还是 Chebyshev 谱离散的方式,最后我们都能够得到如下的矩阵方程组:

$$\overline{A}\Phi = \omega \overline{B}\Phi \tag{23}$$

则  $\omega$  的值由如下的行列式来确定:

$$\det|\overline{A} - \omega \overline{B}| = 0 \tag{24}$$

根据模型方程简化程度的不同,如果只有进出口的齐次边界条件,则  $\overline{B}$  是可逆的,那么方程 (24) 可以写成

$$\det|\overline{B}^{-1}\overline{A} - \omega I| = 0 \tag{25}$$

于是  $\omega$  的求解转化为一个标准的矩阵特征值问题,可以通过 QR 算法来求解.如果采用如式 (15) 的边界条件,其中不含有  $\omega$  的项会造成矩阵  $\overline{B}$  的奇异性,这个问题可以通过如下的变换来解决:

$$-(\overline{A} + \overline{B})\Phi = \lambda(\overline{B} - \overline{A})\Phi \tag{26}$$

这个特征值问题可以通过 QZ 算法来解决.同时有

$$\omega = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \tag{27}$$

这样,一个轴流压气机旋转失速稳定性问题就转换成了一个特征值问题.

### 2.4 算法分析

上面我们给出了两种数值离散的方式,我们通过一个简单的例子来比较一下两种算法的收敛性,算例是一个简单的 Sturm-Liouville 本征值问题

$$\begin{cases} u'' + u' + \lambda u = 0 \\ u(-1) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{精确解: } \lambda = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

采用了中心差分 and 谱配置两种方法求解特征值,结果如图 4 示.我们把两种算法与精确解的相对误差做一下比较,在同样的离散点数下 ( $N = 20$ ),误差低于 0.01 的结果有 10 个,而二阶精度的差分格式达到同样精度的特征值只有两个,说明谱方法的收敛速度更快,精度更高.当然这是与 QR 和 QZ 算法本身的特性存在着密切的关系,QR 和 QZ 算法更适合高阶离散,而谱方法恰好

满足了这一点,构造多点差分格式可以一定程度上解决差分方法精度低的缺陷.但是差分方法简单明了,易于编程,而谱方法对复杂几何区域的适应性不好,所以这两种方法要根据模型方程的具体简化形式加以适当的使用.

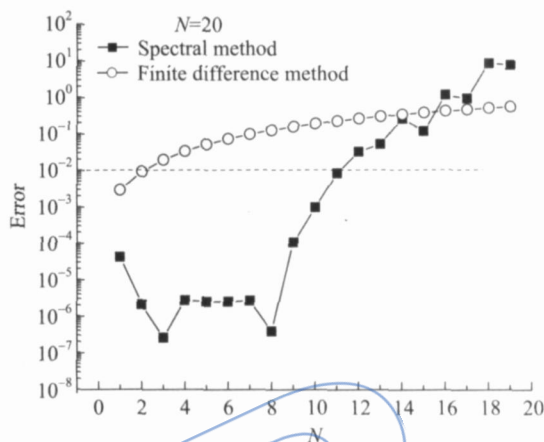


图 4 差分法与谱方法精度对比

Fig. 4 Comparison of accuracy between finite difference method and spectral method for resolving an eigenvalue problem

## 3 总结

- 1) 本文建立了一个关于轴流压气机旋转失速预测的线性稳定性模型,提出了用求解特征值问题的方式预测旋转失速稳定性边界的方法.
- 2) 从流体力学基本方程出发,给出了构建一个特征值问题的一般方式,并提供了进行各个物理层面上进行简化的可能.
- 3) 本模型建立在数值计算的基础之上,较少对经验模型的依赖,同时部分包含了叶片造型对压气机稳定性的影响.
- 4) 对比了有限差分格式和谱配置方法两种数值离散的方式,并通过算例分析了这两种算法的收敛特性.

## 参考文献:

[ 1 ] Emmons H W, Pearson C E, Grant H P. Compressor surge and stall propagation [J]. Transaction of the ASME, 1955,77:455-467.  
[ 2 ] Stenning A, Kriebel A, Montgomery S. Stall propagation in axial compressors[R]. NACA TN 3580, 1955.  
[ 3 ] Moore F K, Greitzer E M. A theory of post-stall transients in axial compression system: Part I—Development of equations[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986,108:68-76.

- [ 4 ] Moore F K, Greitzer E M. A theory of post-stall transients in axial compression system: Part II—Applications [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986,108:231-240.
- [ 5 ] Ludwig G, Nenni J, Arent R. Investigation of rotating stall in axial flow compressors and the development of a prototype rotating stall control system[R]. AFAPL-TR-73-45, 1973.
- [ 6 ] Nakata H, Nagano S. Nonlinear analysis of rotating stall [J]. Journal of Engineering for Power, 1972, 10: 279-293.
- [ 7 ] Neuhoff H G, Grahl K G. Numerical simulation of rotating stall in axial compressor blade rows and stages[R]. ASME 86-GT-27.
- [ 8 ] Lindau J W, Owen A K. Nonlinear quasi-three-dimensional modeling of rotating stall and surge [R]. AIAA 97-2772.
- [ 9 ] Longley J P. Calculating the flowfield behaviour of high-speed multi-stage compressors[R]. ASME 97-GT-468.
- [10] Escuret J F, Garnier V. Numerical simulation of surge and rotating stall in multi-stage axial-flow compressors [R]. AIAA 94-3202.
- [11] Gong Y, Tan C S, Gordon K A, et al. A computational model for short wavelength stall inception and development in multi-stage compressors[R]. ASME 98-GT-476.
- [12] Xu L, Hynes T P, Denton J D. Towards long length scale unsteady modeling in turbomachines[J]. Proc. Turbomachines, I Mech E, Part A: J. Power Energy, 2003,217: 75-82.
- [13] Hoving D A. Blade passage flow structure effects on axial compressor rotating stall[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [14] He L. Computational study of rotating stall inception in axial compressors[J]. Journal of Propulsion and Power, 1997,13(1):31-38.
- [15] Yousef J M. Development of immersed boundary methods for complex geometries, annual research brief [R]. Center for Turbulence Research, 1998.
- [16] Epstein A H, Ffowcs Williams J E, Greitzer E M. Active suppression of compressor instability [R]. AIAA-86-1914.
- [17] 孙大坤, 孙晓峰. 非定常机匣处理对失速先兆波的抑制作用实验研究[J]. 航空动力学报, 2008,23(4):671-679.  
SUN Dakun, SUN Xiaofeng. An experimental study on inhibition of unsteady casing treatment on stall inception [J]. Journal of Aerospace Power, 2008,23(4):671-679. (in Chinese)